Planche n° 35. Systèmes d'équations linéaires : corrigé

Exercice n° 1

m, a, b, ... sont des paramètres réels. On note (S) le système proposé et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

1) $\det(S) = 2(m(m-5)-6)+(3(m-5)-3)+7(6-m) = 2m^2-14m+12 = 2(m-1)(m-6)$. Le système est de Cramer si et seulement si $m \in \{1, 6\}$.

• Si $m \notin \{1, 6\}$, les formules de Cramer fournissent alors :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{4(m^2-5m-6)-5(3m-18)-7(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1}$$

$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(5m-39))+(4m-27)+21}{2(m-1)(m-6)} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1}$$

$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{2(7m-15)+9+7(-4m+15)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

Si $m \notin \{1, 6\}$, $\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{2m-9}{m-1}, \dfrac{7}{m-1}, -\dfrac{7}{m-1}\right)\right\}$.

• Si $m \in \{1, 6\}$, $\det(S) = 0$. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations s'écrit $\left\{\begin{array}{l} 2x+z = 4-3y \\ -x+2z = 5-my \end{array}\right.$ et équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \dfrac{14-(2m+3)y}{5} \end{array}\right.$.

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent si $m \in \{1, 6\}$).

$$\begin{aligned} 7x+3y+(m-5)z = 7 &\Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5}+3y+(m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21+14(m-5)-35 = 0 \\ &\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, le système n'a pas de solution et si $m = 6$, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{3}{5}, y, -\dfrac{y}{5}\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$.

2) $\det(S) = 2(-8m-4+2)-(4m+1)+5(2m+2m+1) = 0$. Le système n'est jamais de Cramer. Un déterminant principal est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \dfrac{-3m+8+(5m+2)y}{3} \end{array}\right.$. La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

$$\begin{aligned} 5x-y+4z = 3m-2 &\Leftrightarrow 5\frac{6m-4-(4m+1)y}{3}-y+4\frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m-2 \\ &\Leftrightarrow 5(6m-4)+4(-3m+8)-3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Si $m \neq -2$, le système n'a pas de solution. Si $m = -2$, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{-16+7y}{3}, y, \dfrac{14-8y}{3}\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$.

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2+2m = -2m(m-1)$. Le système est de Cramer en x, y et z si et seulement si $m \notin \{0, 1\}$.

• Si $m \notin \{0, 1\}$, les formules de Cramer fournissent :

$$x = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ m+2+mt & m & 1 \\ -1+t & -1 & -m \end{vmatrix} = \frac{(2m^2-2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -t+1$$
$$y = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 1 & 3-t & 1 \\ 1 & m+2+mt & 1 \\ m & -1+t & -m \end{vmatrix} = \frac{(-2m^2-2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}t+1$$
$$z = \frac{1}{-2m(m-1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-t \\ 1 & m & m+2+mt \\ m & -1 & -1+t \end{vmatrix} = \frac{(2m^2+2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -\frac{m+1}{m-1}t+1.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{\left(-t+1, \frac{m+1}{m-1}t+1, -\frac{m+1}{m-1}t+1, t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

• Si $m = 0$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=3 \\ x+z=2 \\ y+t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2-x \\ t=-1-y \\ 1=3 \end{array}\right.$. Dans ce cas, le système n'a pas de solution.

• Si $m = 1$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=3 \\ x+y+z-t=3 \\ x-y-z-t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ x=1 \\ z=2-y \end{array}\right.$. Dans ce cas, l'ensemble de solutions est $\{(1, y, 2-y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$.

4)

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & m & 1 & 2 \\ m & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+6 & 2 & 3 & m \\ m+6 & 1 & m & 3 \\ m+6 & m & 1 & 2 \\ m+6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4)$$
$$= (m+6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m+6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & m-3 & 3-m \\ 0 & m-2 & -2 & 2-m \\ 0 & 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} \ (\forall i \in [\![2,4]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_1)$$
$$= (m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 3-m \\ m-2 & -2 & 2-m \\ 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = (m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & -m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} \ (C_3 \leftarrow C_3+C_2)$$
$$= -m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_3)$$
$$= -m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 \\ m-3 & -1 \end{vmatrix} = m(m-2)(m-4)(m+6).$$

Le système est de Cramer si et seulement si $m \notin \{0, 2, 4, -6\}$. Dans ce cas :

$$m(m-2)(m-4)(m+6)x = \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-(m-1) & 3-m(m-1) & m-3(m-1) \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 3-m & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ m & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5m-6 & -m^2+5m-3 & -2m+3 \\ m-6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -[-3(5m-6)-(m-6)(-m^2+5m-3)]$$
$$= -m^3+11m^2-18m = -m(m-2)(m-9).$$

et $x = -\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}$.

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)y &= \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & 0 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3m^2-5m-6 & -m^2+m+3 & 2m^2-4m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ m-6 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -3(3m^2-5m-6) - (m-6)(2m^2-4m-3) \\
&= -2m^3+7m^2-6m = -m(2m-3)(m-2)
\end{aligned}$$

et $y = -\dfrac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)z &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-1 & m \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & 0 & -2m+3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -2m+3 \\ 3 & m & 2 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(-2m+3)(m-6) + 3(5m-6) - m(2m^2-5m+6) = -2m^3+7m^2-6m \\
&= -m(2m-3)(m-2),
\end{aligned}$$

et $z = -\dfrac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)t &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m-1 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 & 0 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 \\ 3 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-2m+3)(2m-3) - 3(3m^2-5m-3) + m(m^3-m^2-4m+3) \\
&= m^4-m^3-17m^2+30m = m(m-2)(m^2+m-15)
\end{aligned}$$

et $t = \dfrac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}$.

• Si $m = 0$, le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=-1 \\ 2x+y+3t=1 \\ 3x+z+2t=0 \\ 3y+2z+t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0\ (E_1+E_2) \\ 2x+y+3t=1 \\ x+y+z+t=0 (E_3+E_4) \\ 3y+2z+t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=-x-y-z \\ -x-2y-3z=1 \\ -x+2y+z=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=x-2y \\ -x-2y-3(x-2y)=1 \\ t=-x-y-z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x+\dfrac{1}{4} \\ z=-x-\dfrac{1}{2} \\ t=-x+\dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$

D'où l'ensemble de solutions : $\mathscr{S} = \left\{\left(x, x+\dfrac{1}{4}, -x-\dfrac{1}{2}, -x+\dfrac{1}{4}\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

• Si $m = 2$, on obtient pour ensemble de solutions : $\left\{\left(x, -x - \dfrac{5}{8}, x + \dfrac{1}{2}; -x - \dfrac{1}{8}\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

• Si $m = 4$ ou $m = -6$, on voit en résolvant que le système est incompatible.

5) $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m(2m) + (-m+1) + (m+1) = 2(m^2+1) \neq 0.$

Le système formé des équations 1, 2 et 4 est donc de Cramer. Les formules de Cramer fournissent alors :

$$x = \frac{2m^2 - m - 1}{m^2+1},\ y = 3 - m \text{ et } z = \frac{3m-1}{m^2+1}.$$

La troisième équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$\begin{aligned} -m\frac{2m^2-m-1}{m^2+1} + 3 - m + m\frac{3m-1}{m^2+1} = -m \\ &\Leftrightarrow -m(2m^2-m-1) + (3-m)(m^2+1) + m(3m-1) = -m(m^2+1) \\ &\Leftrightarrow -2m^3 + 7m^2 - m + 3 = 0 \end{aligned}$$

Le système est compatible si et seulement si m est l'une des trois racines de l'équation $-2z^3 + 7z^2 - z + 3 = 0$.

6) $\det S = \dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \dfrac{\mathrm{Van}(a,b,c)}{abc}.$

Si a, b et c sont deux à deux distincts, le système est de Cramer. On obtient :

$$x = \frac{abc}{mbc}\frac{\mathrm{Van}(m,b,c)}{\mathrm{Van}(a,b,c)} = \frac{a(b-m)(c-m)}{m(b-a)(c-a)},$$

puis, par symétrie des rôles, $y = \dfrac{b(a-m)(c-m)}{m(a-b)(c-b)}$ et $z = \dfrac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$.

Si $a = b \neq c$ (ou $a = c \neq b$ ou $b = c \neq a$), le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 - z \\ ax + ay + cz = m \\ \dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{a}y + \dfrac{1}{c}z = \dfrac{1}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 1 - z \\ a(1-z) + cz = m \\ \dfrac{1}{a}(1-z) + \dfrac{1}{c}z = \dfrac{1}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 1 - z \\ z = \dfrac{m-a}{c-a} \\ \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)\dfrac{m-a}{c-a} = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{a} \end{array}\right. .$$

Le système est compatible si et seulement si $(m-a)(m-c) = 0$ ou encore ($m = a$ ou $m = c$). Dans ce cas, l'ensemble des solutions est : $\left\{\left(x, \dfrac{m-c}{a-c} - x, \dfrac{m-a}{c-a}\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

Si $a = b = c$, le système s'écrit : $x + y + z = 1 = \dfrac{m}{a} = \dfrac{a}{m}$. Le système est compatible si et seulement si $m = a = b = c$ et dans ce cas l'ensemble des solutions est : $\{(x, y, 1 - x - y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

7)

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2-(b+c)^2 & (a+c)^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-(a+c)^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ puis } L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a-b-c & a+c-b & 0 \\ 0 & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a+c-b & 0 \\ -2(b-c) & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix} \\ &= 2(a+b+c)^2(c^2(-c(b-a-c) + (b-c)(a+c-b)) + (a+b-c)(bc(a+c-b) + b^2c)) \\ &= 2(a+b+c)^2(c^2b(a-b+c) + (a+b-c)bc(a+c)) \\ &= 2bc(a+b+c)^2(a^2+ab+ac) = 2abc(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

Si $abc(a+b+c) \neq 0$, le système est de CRAMER et on obtient après calcul :

$$x = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)},\ y = \frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)} \text{ et } z = \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2abc(a+b+c)}.$$

Si $a = 0$ (ou $b = 0$ ou $c = 0$), le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} (b+c)^2x + b^2y + c^2z = 1 \\ c^2(y+z) = 1 \\ b^2(y+z) = 1 \end{array}\right. .$$

Donc,

- Si $((a = 0$ et $b^2 \neq c^2)$ ou $(b = 0$ et $a^2 \neq c^2)$ ou $(c = 0$ et $a^2 \neq b^2))$, le système n'a pas de solution.
- Si $a = 0$ et $b = c \neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(0, y, -\frac{y}{b^2}),\ y \in \mathbb{R}\}$ (résultats analogues pour les cas $(b = 0$ et $a = c \neq 0)$ et $(c = 0$ et $a = b \neq 0))$.
- Si $a = b = c = 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $a = 0$ et $c = -b \neq 0$, l'ensemble des solutions est $\{(x, y - \frac{y}{b^2}),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ (résultats analogues pour $(b = 0$ et $c = -a \neq 0)$ et $(c = 0$ et $b = -a \neq 0)$.
- Si $abc \neq 0$ et $a + b + c = 0$, le système équivaut à l'équation $a^2x + b^2y + c^2z = 1$. L'ensemble des solutions est $\left\{\left(x, y, \frac{1 - a^2x - b^2y}{c^2}\right),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

8)

$$\begin{aligned}\det S &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)((a-b)(a-c) + (b-c)^2) = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= (a+b+c)(a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc)\end{aligned}$$

Si $\det S \neq 0$, les formules de CRAMER fournissent :

$$x\det S = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & a & b \\ r & c & a \end{vmatrix} = p(a^2 - bc) + q(c^2 - ab) + r(b^2 - ac)\ldots$$

Exercice n° 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2(-7) = -12 \neq 0$ et le système est de CRAMER en x_1, x_2 et x_4. On note aussi que le système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension $5 - 3 = 2$.

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \\ x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 = 5x_3 + 4x_5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}((-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + x_3 + 2x_5) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = -x_1 + 3x_3 + 3x_5 \\ x_1 + 2(-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + 3(-x_1 + 3x_3 + 3x_5) = x_3 - x_5 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 3x_3 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi, $F = \{(3x_3 + 3x_5, -x_3 - 2x_5, x_3, 0, x_5),\ (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = (3, -1, 1, 0, 0)$ et $e_2 = (3, -2, 0, 0, 1)$ et, puisque $\dim F = 2$, une base de F est (e_1, e_2).

Exercice n° 3

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k, le problème posé équivaut au système :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ z_k + z_{k+1} = 2a_k \text{ et } z_n + z_1 = 2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times 1^{n-1} + (-1)^{n+1} \times 1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)} \\ &= 1 - (-1)^n.\end{aligned}$$

• Si n est impair, $\det S = 2 \neq 0$ et le système admet une et une seule solution.
On obtient $z_2 = 2a_1 - z_1$, $z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1$,..., $z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... + 2a_2 - 2a_1 + z_1$ et enfin :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... + 2a_2 - 2a_1 + z_1 + z_1 = 2a_n,$$

et donc $z_1 = a_1 - a_2 + ... - a_{n-1} + a_n$ puis $z_2 = a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{n-1} - a_n$ puis $z_3 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 ... + a_n$ ... puis $z_n = -a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$.

• Si n est pair, $\det S = 0$ mais le mineur formé des $n-1$ premières lignes et $n-1$ dernières colonnes est non nul. Donc, le système est de rang $n-1$, les $n-1$ premières équations et $n-1$ dernières inconnues peuvent être choisies pour équations et inconnues principales.
On résout les $n-1$ premières équations constituant un système de Cramer en z_2,...,z_n. On obtient

$$z_2 = 2a_1 - z_1,\ z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, ...,\ z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... - 2a_2 + 2a_1 - z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + ... - 2a_2 + 2a_1 - z_1 + z_1 = 2a_n \Leftrightarrow a_1 + a_3 ... = a_2 + a_4 + ...$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points $(A_1, A_3, ...)$ et $(A_2, A_4, ...)$ ont même isobarycentre.

En résumé, si n est pair et si les systèmes de points $(A_1, A_3, ...)$ et $(A_2, A_4, ...)$ n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solutions.
Si n est pair et si les systèmes de points $(A_1, A_3, ...)$ et $(A_2, A_4, ...)$ ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions : M_1 est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points A_1, A_2 ...

Exercice n° 4

Soit D_n le déterminant du système pour $n \geqslant 3$. En développant ce déterminant suivant sa première colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 5,\ D_n = D_{n-1} - D_{n-2},$$

ce qui fournit aisément par récurrence, en tenant compte de $D_3 = D_4 = -1$:

$$\forall k \geqslant 1,\ D_{3k} = D_{3k+1} = (-1)^k \text{ et } D_{3k+2} = 0.$$

Pour n élément de $3\mathbb{N}^* \cup (1 + 3\mathbb{N}^*)$, le système est de Cramer et homogène et admet donc une et une seule solution à savoir la solution nulle.

Pour $n = 3k+2$, puisque $D_n = 0$ mais que le mineur de format $n-1$ constitué des $n-1$ premières lignes et colonnes est D_{n-1} et est donc non nul, le système est homogène de rang $n-1$ et l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1. On trouve aisément $\mathcal{S} = \{\lambda(1, -1, 0, 1, -1, 0..., 1, -1),\ ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n° 5

(1) $\Rightarrow$ (2). Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que : $(\forall (a_1, ..., a_n) \in E^n /\ (\det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0) \Rightarrow ((f_1, ..., f_n)$ liée).

• Pour $n = 1$,

$$(\forall a_1 \in E /\ \det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 1} = 0) \Rightarrow (\forall a_1 /\ f_1(a_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ liée.}$$

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $(\forall (a_1, ..., a_n) \in E^n / \det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0) \Rightarrow (f_1, ..., f_n)$ liée.
Soient f_1,..., f_{n+1} $n+1$ fonctions telles que $\forall (a_1, ..., a_{n+1}) \in E^{n+1} / \det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} = 0$.
Si $(f_1, ..., f_n)$ est liée alors $(f_1, ..., f_{n+1})$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée. Si $(f_1, ..., f_n)$ est libre, par hypothèse de récurrence, il existe a_1,...,a_n n éléments de E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$. Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x \in E,\ \det(f_i(a_1), \ldots, f_i(a_n), f_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n+1} = 0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(x) = 0$ où les λ_i sont indépendants de x ou encore une égalité du type $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i = 0$ avec $\lambda_{n+1} = \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$ ce qui montre encore que $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ est liée.

$(2) \Rightarrow (1)$. On suppose que $\exists (a_1, \ldots, a_n) \in E^n / \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0)$. Montrons que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En particulier : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(a_j) = 0$. Les n égalités précédentes fournissent un système d'équations linéaires en les λ_i à n inconnues, n équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de Cramer homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$. On a montré que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice n° 6

Soit A_n la matrice de l'énoncé. En développant $\det(A_n)$ suivant sa première colonne puis en développant le déterminant de format $n-1$ obtenu suivant sa première ligne, on obtient $\det(A_n) = -\det(A_{n-2})$ pour $n \geqslant 3$.
Par suite, pour $p \geqslant 1$, $\det(A_{2p}) = (-1)^{p-1}\det(A_2) = (-1)^p \neq 0$ et pour $p \geqslant 1$, A_{2p} est inversible.
On a aussi, pour $p \geqslant 1$, $\det(A_{2p+1}) = (-1)^{p-1}\det(A_3) = 0$ et, pour $p \geqslant 1$, A_{2p+1} n'est pas inversible. Finalement, A_n est inversible si et seulement si n est pair.

Dorénavant, on pose $n = 2p$ $(p \geqslant 1)$. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ vecteurs colonnes donnés, on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = y_1 \\ \forall i \in [\![2, 2p-1]\!],\ x_{i-1} + x_{i+1} = y_i \\ x_{2p-1} = y_{2p} \end{array}\right. .$$

Ce système se résout en $x_2 = y_1$ puis, par récurrence, pour $k \leqslant p$, $x_{2k} = y_{2k-1} - y_{2k-3} + \ldots + (-1)^{k-1}y_1$ et aussi $x_{2p-1} = y_{2p}$, puis, par récurrence, pour $k \leqslant p$, $x_{2k-1} = y_{2k} - y_{2k+2} + \ldots + (-1)^{p-k}y_{2p}$. D'où l'inverse de A quand $n = 8$ par exemple :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 7

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X + b_k}$. La fraction rationnelle F s'écrit, après réduction au même dénominateur :

$$F = \frac{P}{Q} \text{ où } Q = \prod_{k=1}^{n}(X + b_k) \text{ et } P \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } n-1.$$

Maintenant,

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ F(a_k) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ (Q - P)(a_k) = 0.$$

Par suite, puisque les a_k sont deux à deux distincts, $Q - P$ est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$. Mais, Q est unitaire de degré n et P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, et donc $Q - P$ est unitaire de degré n ce qui montre que $Q - P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ ou encore que

$$P = \prod_{k=1}^{n}(X + b_k) - \prod_{k=1}^{n}(X - a_k).$$

Réciproquement, si $F = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+b_k) - \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$, alors $\forall k \in \{1, ..., n\},\ F(a_k) = 1$.

En résumé,

$$(x_1, ..., x_n) \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X+b_k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+b_k) - \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \lim_{x \to -b_i} (x+b_i) \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+b_k) - \prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+b_k)}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(b_i+a_k)}{\displaystyle\prod_{k\neq i}(b_i-b_k)}$$

Exercice n° 8

1) Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0 \Rightarrow \forall p \in [\![0, n-1]\!],\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k}^{(p)} = 0 \Rightarrow \forall p \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^p e^{a_k x} = 0$$

$$\Rightarrow \forall p \in [\![0, n-1]\!],\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^p \text{ (égalités obtenues pour } x = 0).$$

Les n dernières égalités écrites constituent un système (S) de n équations linéaires à n inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Le déterminant de ce système est $\text{Van}(a_1, \ldots, a_n)$. Ce déterminant n'est pas nul car les a_k sont deux à deux distincts. Par suite, (S) est un système de Cramer homogène. (S) admet donc l'unique solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$. On a montré que la famille $(f_{a_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

2) Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant p} \in \mathbb{C}^p$.

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(q_k^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Rightarrow \forall n \in [\![0, p-1]\!],\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k^n = 0.$$

Les n dernières égalités écrites constituent un système (S) de p équations linéaires à p inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Le déterminant de ce système est $\text{Van}(q_1, \ldots, q_p)$. Ce déterminant n'est pas nul car les q_k sont deux à deux distincts. Par suite, (S) est un système de Cramer homogène. (S) admet donc l'unique solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$. On a montré que la famille $\left((q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

